Definição de conceito de número real: discussões e influências de *já-encontrados*

Concept definition of real number: discussions and influences of met-befores

Gerson Geraldo Chaves*

Vera Helena Giusti de Souza**

Rosana Nogueira de Lima***

Resumo

Neste artigo, apresenta-se uma discussão qualitativa sobre a *definição de conceito* de número real de 23 estudantes brasileiros de uma terceira série do Ensino Médio, com foco especial na influência do sentido usual da palavra real na *definição de conceito* desse grupo. Essa discussão é um recorte de uma pesquisa que visa verificar se o entendimento de propriedades dos números reais contribui para a não discretização de intervalos reais. Tem-se como fundamentação teórica as ideias de *imagem de conceito*, de *definição de conceito* e a teoria dos *Três Mundos da Matemática*. A análise das *definições de conceito* de número real evidencia que o conceito de número real não é claro para mais da metade dos estudantes pesquisados e que, dentre esses, as respostas de quatro deles nos dão indícios de que utilizam o sentido léxico da palavra "real" para definir número real.

Palavras-chave: Número real. Definição de conceito. Obstáculos linguísticos.

Linha Temática: Educação Matemática

1 Introdução

No Brasil, o conjunto dos números reais começa a ser trabalhado no final do Ensino Fundamental e suas noções são ampliadas no Ensino Médio. Com isso, esperávamos que estudantes concluintes do Ensino Médio tivessem uma

* Doutorando em Educação Matemática. UFV – Universidade Federal de Viçosa – *Campus* de Florestal. gerson@ufv.br

** Doutora em Educação Matemática. USP – Universidade de São Paulo. verahgsouza@gmail.com

*** Doutora em Educação Matemática. UNIAN – Universidade Anhanguera de São Paulo. rosananlima@gmail.com

clara *definição de conceito* de número real e uma *imagem de conceito* rica, no que se refere aos números racionais e irracionais que compõem esse conjunto. Contudo, verificamos que, para mais da metade dos estudantes pesquisados, a *definição de conceito* de número real não está clara.

A noção de número real está presente em grande parte dos conteúdos de Matemática. Apesar de ser um assunto essencial para a compreensão de outros tópicos da Matemática, um número considerável de trabalhos, dentre eles os de Robinet (1986); Fischbein, Jehiam e Cohen (1995); Soares, Ferreira e Moreira (1999) e Silva (2011), apontam dificuldades que estudantes de todos os níveis, futuros professores e professores ainda detêm sobre o conjunto numérico em questão, apresentando, também, equívocos que cometem quando se trata de sua definição, de sua representação e de noções subjacentes. Preocupados com a aprendizagem desse tema, elaboramos um questionário com algumas questões no qual figura a pergunta "**O que são os números reais? Expresse uma definição"** e ainda solicitamos que indicassem alguns números que exemplificassem a definição dada com o objetivo de traçar os modelos que 23 alunos brasileiros concluintes do Ensino Médio detêm sobre a *definição de conceito* de número real.

Um questionário contendo diversas perguntas sobre números reais e noções subjacentes foi respondido por esses estudantes, nomeados de **A** a **W**, que tinham na época idade entre 16 e 18 anos, terminaram em 2015 o Ensino Médio em uma Instituição Federal de Ensino e se preparavam para ingressar no Ensino Superior em 2016.

Na análise das respostas obtidas nos protocolos, procuramos levantar *já-encontrados* que pudessem ter influenciado de alguma maneira a resposta dada pelo estudante e, dentre eles, consideramos o sentido usual da palavra real.

2 Obstáculos linguísticos

Algumas palavras que usualmente são utilizadas com determinado sentido podem influenciar na concepção de determinado conceito em Matemática. Silva, Silva e Lucena (2010), a partir de uma discussão a respeito de obstáculos epistemológicos e obstáculos didáticos, discutem algumas dificuldades presentes no aprendizado de Matemática causadas por mal-entendidos de linguagem, que denominam obstáculos linguísticos. Nesse sentido, na linguagem usual, a palavra real está associada a algo que existe. Assim, na *imagem de conceito* de um indivíduo pode estar presente a ideia de que números reais são aqueles que existem, relegando aos números complexos ou mesmo aos números irracionais a irrealidade ou a não existência.

3 Considerações teóricas

Segundo Tall e Vinner (1981), podemos dizer que a *imagem de conceito* se refere à estrutura cognitiva individual total associada a determinado conceito, que pode ter aspectos incluídos, excluídos ou modificados, conforme o indivíduo amadurece. Não é uma estrutura estática, pode ser enriquecida à medida que o indivíduo encontra novos estímulos, no decorrer da vida.

A *imagem de conceito* pode ser composta por atributos de diferentes naturezas e ter representações verbais e não verbais de todos os tipos, que cada um associa a um determinado conceito. A *imagem de conceito* de números reais de um indivíduo pode incluir elementos tais como: uma definição, seja ela coerente com a definição aceita pela comunidade matemática ou não (por exemplo, é qualquer número racional ou irracional; números reais são inteiros e positivos; é qualquer número exato); formas de representação (a reta numérica, exemplos de números racionais ou irracionais, representação decimal); utilização em outros conteúdos (domínio de uma função real); ligação com o sentido usual da palavra real (números reais são aqueles que existem), dentre outros. Assim, todos esses atributos podem, ou não, estar na *imagem de conceito* de um indivíduo e se associar ao conceito de número real.

A *Definição de Conceito* está relacionada ao conjunto de palavras utilizadas pelo indivíduo para definir determinado conceito, sendo também individual e, como a *imagem de conceito,* pode mudar ao longo do tempo. Pode ser uma simples memorização, pode expressar a compreensão matemática do conceito em questão ou pode ser uma reconstrução pessoal da definição formal. Como exemplo, ao ser solicitado para definir número real, o indivíduo pode expressar que é “um número inteiro e positivo”, outro pode dizer que é “todo número”, um terceiro pode indicar que é “a união dos racionais com os irracionais” ou indicar simbolicamente “$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$”, outro pode colocar que é “qualquer número que pode ser representado na forma decimal” ou, ainda, “que em módulo pode expressar qualquer medida”, manifestações essas que podem ser consistentes com a definição formal.

A teoria dos *Três Mundos da Matemática* considera que o pensamento matemático habita três mundos distintos e inter-relacionados: o *Mundo Conceitual Corporificado*, o *Mundo Operacional Simbólico* e o *Mundo Formal Axiomático*, que não são hierárquicos e nem necessariamente obrigatórios, e que cada indivíduo traça seu próprio caminho entre eles. A teoria destaca que, em determinado estágio do desenvolvimento cognitivo, o indivíduo pode interagir dois mundos ou até mesmo apresentar, simultaneamente, características dos *Três Mundos da Matemática*.

O *Mundo Conceitual Corporificado*, denominado simplesmente de *Mundo Corporificado*, é o mundo das observações, ações e reflexões sobre os objetos. São características desse mundo as visualizações, manipulações, percepções, observações, descrições e experiências sobre os objetos, agindo e refletindo sobre eles, seja física ou mentalmente. Ao pensar nos números reais, podemos corporificá-los na forma do desenho de uma reta.

O *Mundo Simbólico* é o mundo dos símbolos matemáticos, que representam as percepções e ações que estão presentes no *mundo corporificado*. Nesse mundo, podemos pensar nos números reais escrevendo $x \in \mathbb{R}$.

O *Mundo Formal* é o mundo das definições, axiomas e teoremas para explicar os conceitos matemáticos, a partir dos quais podem-se fazer demonstrações, provas e formar as estruturas matemáticas. Esse mundo, em sua totalidade, só é trabalhado no Ensino Superior, mas o aluno da Educação Básica se depara com características desse mundo quando, por exemplo, trabalha com propriedades dos números e dos conjuntos numéricos. No nosso caso, a definição dos conjuntos numéricos e noções subjacentes aos números reais como a questão da densidade, ordem, completude e infinito trazem ideias com características desse mundo, pois trabalham propriedades que são explicadas apenas com a Matemática formal.

O entendimento de certa situação matemática varia de indivíduo para indivíduo porque é baseado em experiências anteriores, seja da vida escolar ou do cotidiano, experiências essas que ajudaram a desenvolver a própria *imagem de conceito*, que pode ter características de qualquer um dos mundos ou mesmo de mais de um deles. As experiências anteriores são de fundamental importância, pois afetam a aprendizagem de um conceito matemático. Quando um indivíduo se depara com uma situação que lhe parece familiar, pode utilizar um procedimento ou conceito que já conhece e essa experiência prévia pode ser solidária ou problemática para a aprendizagem do novo conceito. Dessa forma, um *já-encontrado* "é toda e qualquer experiência anterior a um certo aprendizado, considerada como construto mental, presente na imagem de conceito do aluno, que possa interferir no aprendizado em questão, seja de forma positiva ou negativa" (LIMA, 2007, p.88).

Entendemos que alguns *já-encontrados* podem ser dificultadores para a compreensão dos números reais, dentre esses destacamos o sentido usual da palavra real, uma vez que um indivíduo pode reconhecer número real como aquele que existe, relegando aos irracionais ou complexos a não existência ou irrealidade. Da mesma forma, o sentido usual da palavra contínuo ou continuidade poderá levar o indivíduo a imaginar que o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais sejam contínuos porque continuam indefinidamente.

A compreensão de características da reta, como ser ilimitada e formada por infinitos pontos adimensionais, pode ser um *já-encontrado* que atue de forma colaboradora quando se quer a compreensão da correspondência que existe entre os números reais e os pontos da reta.

4 As *definições de conceito* de número real expressas pelos 23 estudantes pesquisados

Ao analisar as respostas obtidas nos protocolos, as agrupamos em três categorias: 1) números reais vistos como conjuntos numéricos específicos; 2) números reais considerados como “todo número”; e 3) definições pertinentes.

1) Números reais vistos como conjuntos numéricos específicos

Nesta categoria, enquadramos as respostas que trazem, na *definição de conceito,* a expressão de que os números reais estão relacionados a algum conjunto numérico ou tipo de número específico. São respostas expressas na língua materna, destituídas de *características formais*, ou seja, não trazem ideias que possam definir números reais como esses são ensinados no Ensino Médio. Consideramos que essas respostas trazem características do *mundo corporificado*, pois entendemos que o sujeito traz, em sua definição, corporificações adquiridas por meio de manipulações mentais, talvez oriundas do trato com contagens e medições. **G**, **T** e **L** trazem em suas respostas características do *mundo corporificado simbólico*, pois indicam símbolos matemáticos que representam números ou conjuntos numéricos. Consideramos que nesse grupo nenhuma resposta traz características do *mundo formal*.

No que segue, indicamos as respostas que enquadramos nesta categoria.

G – *"Qualquer número inteiro positivo. X"*
H – *"São todos os números naturais, conhecidos até hoje."*
T – "*O conjunto dos números reais é expresso pela letra* $\mathbb{R}$ *e representa os números positivos inteiros".*
W – *"Números reais são todos os números positivos dentro da matemática e inteiros".*
A – *"números reais são quaisquer numero exato"*
I – *"É qualquer número que possui um limite que não é uma dízima periódica infinita".*
J – *"São números do conjunto real esse conjunto contém números pares e impares, positivos e negativos".*
R – "É um conjunto de números, que podem ser inteiros ou não, mas que devem ser positivos".
M – *"São números que estão dentro do conjunto real. O conjunto real é aquele que compõem números pares e ímpares, positivos e negativos, inteiros e fracionados, etc, não empregando os números que não tem solução. (não empregando os números irracionais)".*
D – *"Os números reais são aqueles que existem e são possíveis".*
V – *"São todos os números que aprendemos no ensino fundamental".*
L – "*São números que satisfazem à seguinte condição:* $x \in \mathbb{R}$".
K – *"Números reais são todos aqueles números existentes".*

Considerando que os números naturais são inteiros positivos, esse é o equívoco mais frequente (1/3 dos estudantes inclusos nessa categoria deu essa resposta). Fischbein, Jehian e Cohen (1995), em sua pesquisa com alunos do Ensino Básico em Tel Aviv, também chegaram a essa conclusão: 40% dos alunos do nível 9 e 22% do nível 10 consideram os números reais como sendo inteiros e positivos.

Fischbein, Jehian e Cohen (1995) colocam que "o protótipo de um número é o número inteiro" (p. 36) e consideramos que essa ideia funcionou como um *já-encontrado*, adquirido no trato com números inteiros, que atua de maneira dificultadora quando se trabalha com números reais, o que é evidenciado nas respostas de quatro dos sujeitos dessa categoria (**G**, **H**, **W**, **T**). Os mesmos autores colocam que um número negativo é intuitivamente inaceitável, o que é manifestado claramente por um terço dos alunos desse grupo (**G**, **T**, **R**, **W**) ao afirmarem que os números reais só podem ser positivos, o que também consideramos como um *já-encontrado* que influenciou de maneira dificultadora para a compreensão do conceito.

Palavras encontradas nas respostas, como inteiro, positivo, número que possui limite, decimais, fracionados e a exclusão dos irracionais, nos levam a acreditar que a palavra "real", na *imagem de conceito* de alguns desses estudantes, seja algo que possa estar relacionado a algo contável ou mensurável e o que foge disso não seria um número real, ideias essas que trazem características do *mundo corporificado*.

Fischbein, Jehian e Cohen (1995) nos relatam que a contradição à ideia de mensurar, ou seja, números que podem ser traduzidos pelos racionais, são facilmente confundidos com irracionalidade. Em nossa pesquisa, as respostas dos alunos **A** e **I** parecem evidenciar o fato da medida para excluir os irracionais, ou seja, considera como número real apenas os decimais finitos, o que expressa um *já-encontrado* dificultador para a compreensão dos números reais. **L** e **M** consideram os irracionais distintos dos reais e **D** relega aos irracionais a não existência, casos discutidos a seguir.

Baseamos-nos nas respostas obtidas em outra pergunta do questionário que indagava a respeito da relação existente entre cada um dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$ e $\mathbb{R}$ e os pontos da reta para corroborar nossas conjecturas.

O estudante **L** não vê uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta, respondendo que "pode existir números que não são reais e que são irracionais". Ideia semelhante é expressa por **M**. Apesar desses dois estudantes perceberem a representação dos números irracionais na reta numérica, os consideram distintos dos reais, sendo nossa hipótese de que o termo "real" teve influência nas respostas.

O estudante **K**, não incluído na segunda categoria pelas respostas dadas a seguir, responde que há uma correspondência entre todos os conjuntos numéricos e os pontos da reta, exceto os irracionais, considerando-os outro tipo de número. As respostas de **K** nos fornecem indícios de que reais são números que podem ser representados na reta numérica e os irracionais, não, ideias essas que na nossa visão podem ter sido influenciadas pelo termo real.

Destacamos respostas expressas por **D** e que nos permitiram inferir que o sentido usual da palavra real é um *já-encontrado* que influencia sua *definição de conceito* de número real.

É verdade que cada ponto da reta numérica corresponde a um número irracional? Justifique.

> "Não, pois os números irracionais não podem ser representados em uma reta, já que eles não existem".

É verdade que cada ponto da reta numérica corresponde a um número real? Justifique.

> "Sim, se um número pode ser representado em uma reta numérica, automaticamente ele é um número real".

O estudante D define números reais como "os números que existem e são possíveis" e, baseados nas duas respostas dadas acima, entendemos que para ele os números reais são os que existem e os irracionais os que não existem, nos fornecendo fortes indícios de que o uso coloquial da palavra real influenciou sua *definição de conceito* de número real, sendo esse termo imaginado no sentido usual um *já-encontrado* dificultador para a compreensão dos números reais.

2) **Números reais considerados como "todo número"**

Nesta categoria, incluímos definições que consideram número real como qualquer número, todo número, incluindo os racionais e irracionais e que não consideram a existência de outros tipos de números, como os complexos. Um único estudante foi incluído nessa categoria, definindo número real como:

> *"Números reais é aquele grupo de numero que abrange todos os outros grupos, ou seja, qualquer número é 'real'".*

3) Definições pertinentes

Nesta categoria, estão as respostas que trouxeram, de alguma forma, a definição de número real como é colocada no Ensino Médio. Por isso, entendemos que trazem características do *mundo formal*.

> **N** – *"São números que podem ser expressos por meio de frações (São todos os números compreendidos dentre os conjuntos:* $\mathbb{N}$, $\mathbb{I}$. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$*".*
> **U** – *"Números reais são aqueles que estão presentes no conjunto dos números inteiros, decimais, negativos".*
> **F** – *"Conjunto união dos números inteiros, naturais, racionais e irracionais".*
> **P** – *"O conjunto dos números reais é aquele que engloba o conjuntos dos racionais e irracionais, ou seja, são todos os números que já estudamos até agora".*
> **B** – *"É o conjunto numérico que engloba os números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ou seja, são todos números conhecidos com excessão dos números complexos".*
> **C** – *"Números reais é o conjunto de todos números existentes, exceto os números complexos".*
> **E** – *"Números reais são aqueles utilizados em todos os cálculos da matemática básica, com exceção dos números que tenham relação com raiz quadrada de um número negativo (que aí já seria os denominados complexos)".*
> **Q** – *"Números reais é o conjunto de números que envolve todos os outros conjuntos com excessão dos números complexos".*
> **S** – *"Números reais são números compreendidos entre 0 (zero) e o infinito e que são positivos ou negativos".*

Apesar de não perceber que números naturais e inteiros são racionais, consideramos nesse grupo as respostas dos alunos **N** e **F**, pois trazem nas respostas de outras questões ideias consistentes sobre números reais.

Os alunos **B**, **C**, **E** e **Q** têm, em sua *imagem de conceito,* a ideia de que qualquer número conhecido é real, frisando a exceção dos complexos. Esse fato nos deixou intrigado, fomos buscar uma explicação e descobrimos que todos fazem o curso técnico em eletrônica ou eletrotécnica, no qual os números complexos são vistos no primeiro ano, no estudo de correntes elétricas. Para esses alunos, a ideia de números complexos se tornou um *já-encontrado* atuando de forma colaboradora para a compreensão de números reais, visto que, na maioria de outras respostas do questionário têm concepções mais coerentes e consistentes, em relação aos outros alunos, em especial aos pertencentes à primeira categoria.

5 Algumas conclusões

Na primeira categoria estão inclusos 13 estudantes (mais da metade do total de alunos) e para esse grupo a *definição de conceito* de número real se mostra de maneira equivocada e confusa. Isso é corroborado ao defini-los como números positivos, exatos, inteiros, decimais, pares e ímpares e que não sejam irracionais e, em alguns casos, dando exemplos que não condizem com a definição dada. Alguns mantêm sua concepção de número real ao longo do questionário e outros às vezes trazem respostas conflitantes e muitas vezes incoerentes com a definição dada. Isso nos leva a admitir que a *definição de conceito* de número real não está clara para a maioria dos estudantes dessa turma, indicando o quão confusa é a ideia de número real em suas mentes.

Podemos observar na *definição de conceito* de número real *já-encontrados* que talvez possam influenciar de maneira dificultadora para a compreensão de números reais, como a ideia de que números são números inteiros, número negativo não representa um número real, números com expansão decimal infinita não são reais, não aceitação dos irracionais como reais e a influência do sentido léxico da palavra real. Nossa hipótese é de que o sentido usual da palavra “real” é um *já-encontrado* que influencia a *definição de conceito* de número real. Contudo, devem ser realizados estudos nesse sentido para confirmar ou refutar nossas conjecturas.

Uma interpretação para a origem do equívoco cometido pelo aluno do segundo grupo é que seja provocado por nós, como docentes (o que talvez pudesse ser pesquisado como “obstáculo didático”), uma vez que ao trabalhar com o tema, muitas vezes colocamos que número real é qualquer número, sem frisar que, nesse conjunto, não estão números do tipo $\sqrt[n]{x}$, com $x < 0,\ n = 2k\ (k \in \mathbb{N})$, que pertencem ao conjunto dos números complexos.

Em geral, os estudantes pertencentes às duas últimas categorias procuram exemplificar números reais com uma variedade de tipos de números como dízimas periódicas, raízes irracionais e até o número π, o que não acontece com alunos da primeira categoria. Isso nos leva a inferir que alunos que compreendem a definição de número real têm em seu repertório de imagens uma gama variada de números associados a esse conceito.

A importância do tema e os resultados encontrados nesta pesquisa apontam para a necessidade de um trabalho específico sobre números racionais e irracionais e, a partir deles, construir o conjunto dos números reais, não só como a união dos racionais e irracionais, mas com a exploração de propriedades ligadas à expansão decimal desses números, que possam conduzir à questão da densidade e da completude, com ênfase nesses dois tipos distintos de números, que constituem o conjunto dos números reais e que preenchem toda a reta real sem deixar nela "buracos". Talvez, trabalhar as ideias de densidade e de infinito possam contribuir para superar a circularidade com que o assunto é introduzido no Ensino Médio, causa apontada por pesquisadores (BALDINO, 1994) para a não compreensão dos números reais e que venham a enriquecer a *imagem de conceito* dos aprendizes, fazendo-os compreender esse conjunto tão importante e que é a base de vários assuntos de Matemática.

Referências

BALDINO, Roberto Ribeiro. A Ética de uma definição circular de número real. **Boletim de Educação Matemática**, ano 9, nº 10, p. 31-52, 1994.

FISHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The concept of irrational numbers in hig-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 29, p. 29-44, 1995.

LIMA, Rosana Nogueira de. 2007. 358 f. **Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes Mundos da Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ROBINET, J. Lés reels: Quels modèles en on les élèves? **Educational Studies in Mathematics**, vol. 17, nº 4, November, 1986.

SILVA, Ana Lucia Vaz da. 2011. 333 f. **Números reais no Ensino Médio: identificando e possibilitando imagens conceituais**. Tese (Doutorado em Educação).– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

SILVA, Paulo Vilhena da; SILVA, Francisco Hermes Santos da; LUCENA, Isabel Cristina Rodrigues de. Os obstáculos linguísticos no ensino-aprendizagem da Matemática. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador. **Anais…** Salvador: Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 2010. Disponível em: www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/.../T20_CC332.pdf Acesso: 27/07/2016.

SOARES, Eliana Farias e; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plinio Cavalcanti. Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na Licenciatura. **Zetetiké**, vol. 7, nº 12, p. 95-117, jul/dez, 1999.

TALL, David. **How humans learn to think mathematically: exploring the three worlds of mathematics**. New York, Cambridge University Press, 2013.

TALL, David; VINNER, Sholmo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 12, p. 151-169, 1981.